ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

ПРИКАЗ

22.11.2024 № 15895/1

О методическом обеспечении
государственной итоговой
аттестации в 2025 году
(МК.3070.*)

В соответствии с приказом от 30.08.2018 № 8577/1 «Об утверждении Правил обучения по программам высшего образования - программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, программам ординатуры, реализуемым в Санкт-Петербургском государственном университете», приказом от 03.07.2018 № 6616/1 «Об утверждении форм программ государственной итоговой аттестации» и в целях методического обеспечения государственной итоговой аттестации по основным образовательным программам в 2025 году

ПРИКАЗЫВАЮ:

1. Утвердить программу государственной итоговой аттестации в форме государственного экзамена по основной образовательной программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре МК.3070.* «Современная математика» направления 01.06.01 «Математика и механика» (Приложение № 1).
2. Утвердить программу государственной итоговой аттестации в форме выпускной квалификационной работы по основной образовательной программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре МК.3070.* «Современная математика» направления 01.06.01 «Математика и механика» (Приложение № 2).
3. И. о. начальника Управления маркетинга и медиакоммуникаций Огородниковой П. В. обеспечить размещение настоящего приказа на сайте СПбГУ в разделе «Методическое обеспечение государственной итоговой аттестации в 2025 году» (https://edu.spbu.ru/gia/16-normativnye-akty/443-metodicheskoe-obespechenie-gosudarstvennoj-itogovoj-attestatsii-v-2025-godu.html) не позднее одного рабочего дня с даты издания настоящего приказа.
4. За разъяснением содержания настоящего приказа обращаться посредством сервиса «Виртуальная приемная» на сайте СПбГУ к заместителю первого проректора по стратегическому развитию и партнерству – начальнику Управления образовательных программ.
5. Предложения по изменению и/или дополнению настоящего приказа направлять на адрес электронной почты org@spbu.ru.

6. Контроль за исполнением настоящего приказа оставляю за собой.

Основание: протокол заседания Совета образовательной программы аспирантуры МК.3070.* «Современная математика» от 07.10.2024 № 05/2.3-03-88.

Заместитель первого проректора
по стратегическому развитию и
партнерству – начальник Управления
образовательных программ

М. А. Соловьева

Приложение № 1

УТВЕРЖДЕНА

приказом от 22.11.2024 № 15895/1

Программа государственной итоговой аттестации в форме государственного экзамена по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика» по основной образовательной программе МК.3070.* «Современная математика» уровень образования: подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

1. Общие положения

1.1. Государственный экзамен в соответствии с требованиями действующего образовательного стандарта проводится для проверки выполнения государственных требований к уровню и содержанию подготовки выпускников и уровня их подготовленности к решению как теоретических, так и практических профессиональных задач.

1.2. Целью государственного экзамена является определение уровня подготовленности выпускников и проверка сформированности компетенций, предусмотренных учебным планом основной образовательной программы в соответствии с требованиями действующего образовательного стандарта.

1.3. Объем государственной итоговой аттестации, учебный период и сроки государственной итоговой аттестации указаны в актуальном учебном плане и календарном учебном графике.

1.4. Язык проведения государственного экзамена: язык реализации образовательной программы.

2. Перечень примерных вопросов, выносимых на государственный экзамен, оценочные средства (виды и примеры контрольных заданий)

2.1. Перечень примерных вопросов, выносимых на государственный экзамен:

Экзамен сдается на выбор одной из перечисленных специальностей.

01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Действительный анализ

1.1. Меры, измеримые функции, интеграл

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

1.2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса.

1.3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства Lp, их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

1.4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса.

1.5. Гладкие многообразия и дифференциальные формы

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

Комплексный анализ

2.1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

2.2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций.

2.3. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

2.4. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

2.5. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

2.6. Гармонические функции

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Функциональный анализ

3.1. Метрические и топологические пространства

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

3.2. Нормированные и топологические линейные пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и Lp. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

3.3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.

3.4. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

3.5. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

3.6. Обобщенные функции

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Теоремы (Пикара, Пеано) существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и их систем.
2. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий и параметра. Производная решения по параметру.
3. Теоремы о продолжении решения задачи Коши.
4. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.
5. Линейные уравнения высокого порядка. Структура общего решения линейных однородных и неоднородных уравнений. Формула Лиувилля–Остроградского, метод вариации постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.
6. Системы линейных уравнений. Экспонента матрицы. Матрица Коши, формула Лиувилля–Остроградского, методы интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами.
7. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке.
8. Автономные системы линейных и нелинейных уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы. Построение фазового портрета.
9. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению.
10. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи.
11. Линейные уравнения второго порядка. Нули решений. Теорема сравнения. Теорема Штурма. Достаточные условия колеблемости решений.
12. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций.
13. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
14. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши.

Уравнения с частными производными

15. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теорема Коши–Ковалевской.
16. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.
17. Задача Коши для волнового уравнения и методы ее решения. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа. Метод спуска. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.).
18. Смешанные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье.
19. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.)
20. Задача Коши и смешанные задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.).
21. Обобщенные функции. Действия с обобщенными функциями. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье.
22. Пространства Соболева *Wpm*. Теоремы вложения, следы функций из *Wpm* на границе области.
23. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Вариационный метод решения краевых задач. Краевые задачи на собственные функции и собственные значения.

Оптимальное управление

24. Теоремы отделимости, теорема Банаха об обратном операторе и следствия из них. Определение производных, основные теоремы дифференциального исчисления в функциональных пространствах. Теоремы о неявной функции и обратном отображении. Теорема Люстерника о касательном пространстве.
25. Принцип Лагранжа для гладких задач. Случай бесконечномерных экстремальных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача и задача Лагранжа в классическом вариационном исчислении; уравнения Эйлера и Эйлера-Лагранжа. Простейшие вариационные неравенства.
26. Достаточные условия для бесконечномерных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача вариационного исчисления: необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.
27. Связь между лагранжианом и гамильтонианом. Уравнение Гамильтона-Якоби.
28. Принцип максимума Понтрягина.
29. Решение конкретных задач вариационного исчисления и оптимального управления и экстремальных задач анализа, геометрии, теории аппроксимации.
30. Основные понятия выпуклого анализа и формулы выпуклого исчисления. Теоремы о субдифференциале и об очистке. Принцип Лагранжа для выпуклых задач. Теорема Куна–Таккера.
31. Теоремы двойственности в выпуклом программировании. Теоремы двойственности и симплекс метод в линейном программировании. Транспортная задача и задача о назначении.

Динамические системы

32. Общее понятие структурной устойчивости. Критерий Андронова–Понтрягина структурной устойчивости векторных полей на сфере.
33. Диффеоморфизмы окружности: число вращения; диффеоморфизмы с рациональным числом вращения. Теорема о равномерном распределении для иррациональных поворотов окружности. Теорема Данжуа (без доказательства). Описание структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности.

34. Структурная устойчивость аносовского диффеоморфизма тора. Определение диффеоморфизмов Аносова и формулировка теоремы об их структурной устойчивости.
35. Общая задача теории бифуркаций. Лемма Сарда. Теорема трансверсальности. Семейства общего положения. Бифуркация Андронова–Хопфа.
36. Системы, сохраняющие меру, эргодичность. Возвращаемость по Пуанкаре. Эргодическая теорема.

Задачи математической физики

37. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.
38. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений.. Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.
39. Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний

01.01.04 «Геометрия и топология»

Общая топология

1. Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категории.
2. Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (открыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и Ck-топология в пространстве гладких отображений).
3. Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций.
4. Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения.
5. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в евклидовом пространстве.
6. Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами.
7. Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности.
8. Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность.

Алгебраическая топология

1. Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости.
2. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары. Вычисление k-мерных гомотопических групп n-мерной сферы для k меньших или равных n.
3. Пространства Эйленберга–Маклейна. H-пространства и группа гомотопических классов отображений в H-пространство. Коммутативность фундаментальной группы H-пространства.
4. Группы сингулярных гомологий и когомологий.
5. Симплициальные и клеточные пространства. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика.
6. Гомотопическая инвариантность групп гомологий.
7. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Оператор Бокштейна.
8. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий.
9. Двойственность Пуанкаре для многообразий.

10. Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий.
11. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга–Маклейна.
12. Кольцо когомологий Н-пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел.
13. Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана.
14. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа.
15. Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей.
16. Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения.
17. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения).
18. Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца.
19. Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений.
20. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях.
21. Характеристические классы векторных расслоений.
22. Понятие о группе K(X) и периодичности Ботта. Группа K(X) как когомологический функтор.

Топология гладких многообразий

1. Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий.
2. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса.
3. Перестройки в многообразиях. Конструкция Понтрягина—Тома. Понятие бордизма многообразий.
4. Вложения и погружения. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства.
5. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка).
6. Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл.
7. Теорема Гаусса—Бонне.
8. Гомотопическая классификация отображений n-мерной сферы в себя.
9. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа.
10. Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера–Пуанкаре.
11. Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления.
12. Исчисление струй. Топологии Уитни в пространствах гладких отображений. Теоремы трансверсальности. Теорема трансверсальности Тома и ее следствия: лемма Морса, слабая теорема Уитни.
13. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции.

Топология малых размерностей

1. Классификация двумерных замкнутых поверхностей.
2. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей.
3. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла.
4. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий.

Дифференциальная геометрия

1. Теория кривых в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе.
2. Первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы.
3. Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика.
4. Геометрия Лобачевского.
5. Проективная геометрия.
6. Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли.
7. Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование.
8. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы.
9. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства).
10. Оператор Лапласа и гармонические формы.
11. Двойственность Пуанкаре.
12. Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности.
13. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами.
14. Параллельный перенос и геодезические. Формула Эйлера—Лагранжа. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского, поверхности вращения. Сопряженные точки и индекс геодезической.
15. Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки.
16. Характеристические классы и характеристические числа. Конструкция Чженя—Вейля характеристических классов. Характеристические числа.
17. Теорема Стокса и инвариантность характеристических чисел относительно бордизма.
18. Проективная двойственность и преобразования Лежандра.

Геометрические структуры на гладких многообразиях

1. Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур.
2. Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии.
3. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем.
4. Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры. Слоения и распределения.
5. Теорема Фробениуса.

Геометрия групп Ли и однородных пространств

1. Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях. Односвязные и неодносвязные группы Ли.
2. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы U(n)/O(n) и U(n)/SO(n). Компактные группы Ли и биинвариантная метрика.
3. Кольцо когомологий компактной группы Ли. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли.

Дискретная и комбинаторная геометрия

1. Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне.
2. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости.
3. Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней.

Геометрическая теория уравнений в частных производных

1. Спектр унитарной алгебры.
2. Локализация колец и модулей.
3. Квазирасслоения и псевдорасслоения.
4. Модуль дифференцирований алгебры.
5. Универсальное дифференцирование.
6. Линейные дифференциальные операторы.
7. Алгебра символов дифференциального оператора.
8. Гамильтонов формализм.
9. Пространство джетов.
10. Дифференциально замкнутая категория.
11. Структура представляющего объекта.
12. Геометрические модули.
13. Алгебра косимволов дифференциальных операторов.
14. Алгебра Хопфа косимволов дифференциальных операторов.
15. Двойственная алгебра к алгебре Хопфа косимволов.

01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вероятностные меры, случайные величины и распределения в R^n

1. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова. Основные понятия теории вероятностей. Примеры вероятностных пространств: схема равновозможных исходов, геометрические вероятности. Условная вероятность, формулы полной вероятности и формулы Байеса. Независимость случайных событий.
2. Испытания Бернулли. Формула Бернулли. Нормальное и пуассоновское приближения в схеме Бернулли. Теорема Бернулли и теорема Бореля.
3. Случайные величины и их распределения. Функции распределения. Три основных типа распределений, примеры. Случайные векторы, многомерные распределения. Независимость случайных величин. Бесконечные системы случайных величин, теорема Колмогорова о продолжении системы конечномерных распределений до меры.
4. Моменты случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия. Неравенство Чебышева. Приложения неравенства Чебышева: доказательства закона больших чисел, доказательство Бернштейна теоремы Вейерштрасса. Старшие моменты, корреляционная матрица, коэффициент корреляции.

5. Различные виды сходимости случайных величин и взаимоотношения между различными видами сходимости.
6. Сходимость в среднем. Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами.
7. Независимость событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания.
8. Характеристические функции, формула обращения и теорема единственности, связь с моментами случайных величин, непрерывность соответствия между характеристическими функциями и распределениями.
9. Производящие функции и их свойства.

Последовательности независимых случайных величин

1. Последовательности независимых случайных величин. Закон «0-1», Лемма Бореля-Кантелли.
2. Усиленный закон больших чисел.
3. Центральная предельная теорема, теоремы Леви, Ляпунова, Линдеберга и Феллера.
4. Оценки точности приближения в центральной предельной теореме. Теорема Берри-Эссеена.
5. Безгранично делимые распределения. Представление Леви–Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.
6. Вероятности больших уклонений.
7. Закон повторного логарифма.

Случайные процессы

1. Случайные процессы: основные определения и примеры.
2. Эквивалентные процессы. Регуляризация процессов. Непрерывность траекторий, условия Колмогорова непрерывности траекторий.
3. Винеровский процесс и процесс Пуассона. Классификация процессов.
4. Случайное блуждание. Возвратность. Теорема восстановления.
5. L_2 теория случайных процессов. Процессы с ортогональными приращениями. Стохастические интегралы.
6. Стационарные в широком смысле процессы и их спектральное представление.
7. Задача прогноза.
8. Процессы с независимыми приращениями.
9. Представление стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями.
10. Марковские процессы, однородные марковские процессы и ассоциированные полугруппы. Однородные вполне разрывные марковские процессы. Процессы со счетным множеством состояний.
11. Стохастические интегралы Ито. Стохастические дифференциальные уравнения.
12. Диффузионные процессы. Формула Ито.

Избранные виды зависимых случайных величин

1. Мартингалы и субмартингалы. Неравенство Дуба. Тождество Вальда.
2. Теоремы о сходимости мартингалов.
3. Цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.
4. Процессы рождения и гибели.
5. Ветвящиеся процессы. Задача Гальтона–Ватсона о выживании фамилии.

Математическая статистика

1. Классификация и примеры статистических задач. Статистические эксперименты и статистики. Эмпирические распределения. Выборочные моменты. Порядковые статистики. Теорема Гливенко–Кантелли. Предельные распределения выборочных характеристик.
2. Выборки из нормальной совокупности, распределения основных статистик, статистические задачи о параметрах нормального распределения
3. Достаточные статистики. Теорема факторизации. Полнота достаточных статистик. Несмещенное оценивание с помощью достаточных статистик: теоремы Рао–Блекуэлла–Колмогорова и Лемана–Шеффе. Теорема Базу.
4. Постановка задачи статистического оценивания. Требования, предъявляемые к оценкам параметра. Допустимые, минимаксные и байесовские оценки, соотношения между ними. Методы построения оценок. Регулярные статистические эксперименты, информация Фишера, неравенство Крамера–Рао. Экспонентные семейства.
5. Метод максимального правдоподобия и примеры его применения. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия. Асимптотическая эффективность оценок по Фишеру. Понятие о робастности статистических оценок.
6. Математическая формулировка задачи проверки гипотез. Лемма Неймана-Пирсона. Критерии с монотонным отношением правдоподобия. Критерии отношения правдоподобия для сложных гипотез, теорема Уилкса. Критерий Стьюдента как критерий отношения правдоподобия.
7. Критерий «хи-квадрат» как критерий согласия, независимости и однородности.
8. Критерии, основанные на эмпирической функции распределения.
9. Регрессия как условное математическое ожидание. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса–Маркова. Несмещенное оценивание дисперсии шумов. Задачи дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ. Теорема Кокрена.

01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Основы алгебры

1. Элементарная теория колец и арифметика: определение, примеры, евклидовы кольца. Неприводимые и простые элементы. Идеалы. Основная теорема арифметики. Гомоморфизм и изоморфизм колец. Фактор–кольцо.
2. Многочлены и поля. Кольцо многочленов от одной переменной. Поле рациональных функций. Лемма Гаусса. Факториальные кольца. Поле разложения многочлена. Кратные корни. Теорема Виета. Комплексные числа. Основная теорема алгебры. Разложение рациональной функции в простейшие дроби.
3. Векторные пространства и начала линейной алгебры. Линейная зависимость, существование базиса. Линейные отображения. Подпространство, фактор-пространство. Ранг, матрица линейного отображения. Кольцо матриц. Элементарные преобразования, однородные и неоднородные системы, линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.
4. Элементарная теория групп: определения, циклическая группа, группа перестановок. Действие группы на множестве. Орбиты. Классы сопряженности. Группа обратимых элементов кольца. Полная линейная группа. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Смежные классы, теорема Лагранжа. Теорема Эйлера. Конечные поля. Фактор–группа, теорема о гомоморфизме.
5. Определитель матрицы. Присоединенная матрица. Формула Крамера. Определитель транспонированной матрицы. Определитель произведения матриц.
6. Определение модуля. Примеры. Модуль над кольцом многочленов как пространство с оператором. Конечнопорожденные модули над кольцом главных идеалов.

Нормальная форма Фробениуса. Теорема Кэли–Гамильтона. Собственные векторы и собственные числа. Жорданова нормальная форма.

7. Квадратичные и эрмитовы формы. Матричные разложения. Теорема Лагранжа. Невырожденные формы, дискриминант. Индекс Витта. Ортогонализация Грама–Шмидта. Нормальные операторы. Спектральная теорема. Критерий Сильвестра.
8. Группа движений пространства, подгруппа собственных движений. Порождение отражениями. Алгебра кватернионов. Норма, деление. Теорема Фробениуса. Параметризация группы собственных движений пространства кватернионами.
9. Теория групп. Свободная группа. Задание образующими и соотношениями. Центр. Коммутаторы и коммутант. Совершенные и разрешимые группы. Верхний и нижний центральный ряд. Нильпотентность p-групп. Силовские подгруппы и теоремы Силова. Полупрямое произведение групп. Группы порядка pq.
10. Представления конечных групп. Примеры. Регулярное представление. Прямая сумма. Неприводимые представления. Представления абелевых групп. Лемма Шура и теорема Машке. Матричные коэффициенты представлений. Некоммутативное дискретное преобразование Фурье. Теорема Бернсайда. Характеры. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса. Инвариантные формы на представлениях. Вещественные представления, индекс Шура.
11. Билинейные формы. Базис тензорного произведения. Билинейная форма как 2-ковариантный тензор, опускание и поднимание индексов. Свертка. Знакопеременные формы и поливекторы. Внешняя алгебра: определение, существование и единственность, базис. Градуированная коммутативность. Определитель в терминах внешней алгебры. Формула Лапласа.
12. Свертка поливектора с ковектором. Вложение Плюккера и соотношения Плюккера. Звезда Ходжа. Симметрическая алгебра. Алгебра Клиффорда
13. Начала теории категорий. Теория Галуа. Конкретные категории. Универсальные притягивающие и отталкивающие объекты. Произведение и копроизведение.
14. Определение функтора и естественного преобразования функторов. Примеры. Пределы и копределы. Категория функторов. Лемма Йонеды. Сопряженность функторов. Монады. Аддитивные и абелевы категории. Нормальные и сепарабельные расширения полей. Этальные алгебры. Основная теорема теории Галуа. Топология на абсолютной группе Галуа. Начала гомологической алгебры. Короткие и длинные точные последовательности. Лемма о змее. Точность функторов слева и справа. Hom и тензорное произведение. Проективные, инъективные и плоские модули. Проективная и инъективная резольвента.
15. Категория комплексов. Гомотопии и квазиизоморфизмы. Локализация категорий. Триангулированная категория. Производная категория.
16. Числовые кольца. Нетеровы кольца. Целые элементы и целое замыкание. Кольца дискретного нормирования. Локализация. Дедекиндовы кольца. Теорема Минковского. Теорема Дирихле о единицах. Конечность группы классов идеалов.
17. p-адические поля. Нормирование поля, пополнение. Теорема Островского. Лемма Гензеля. Мультипликативная группа Q p . Квадраты в Q p.. Символ Гильберта. Квадратичные формы над Q p . Теорема Минковского-Хассе.
18. Определение алгебраических групп. Примеры. Гладкость в характеристике 0. Теорема Шевалле. Фактор-группа, ее интерпретация в терминах пучков.
19. Абелевы многообразия. Разложение Жордана–Шевалле. Унипотентные группы.

Математическая логика

1. Проблемы в основаниях математики
2. Буквы и слова. Язык пропозициональной классической логики (PCL).
3. Логическое исчисление. Гильбертовское исчисление для PCL и теорема дедукции.

4. Допустимые правила вывода для PCL. Логическая эквивалентность над PCL.
5. Нормальные формы (конъюнктивные и дизъюнктивные, обычные и совершенные). Приведение формул PCL к нормальным формам.
6. Оценочная семантика для PCL. Таблицы истинности. Теорема о функциональной полноте логических связок для PCL.
7. Теоремы о корректности и сильной полноте для PCL.
8. Исчисление естественного вывода, секвенциальное исчисление и табличное исчисление.
9. Гильбертовское исчисление для пропозициональной интуиционистской логики (PIL) и теорема дедукции.
10. Теоремы о корректности и сильной полноте для PIL.
11. Финитная аппроксимируемость PIL. Алгоритмическая разрешимость PIL.
12. Аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля и аксиома выбора.
13. Ординалы. Теорема о представлении вполне упорядоченных множеств. Кардиналы. Теорема о существовании и единственности кардинала, равномощного данному множеству. Характеризация конечных и бесконечных множеств посредством кардиналов.
14. Базовые операции над ординалами и кардиналами.
15. Язык классической логики первого порядка (FOCL). Гильбертовское исчисление для FOCL и теорема дедукции. Допустимые правила вывода для FOCL. Теоретико-модельная семантика для FOCL. Теорема о корректности для FOCL.
16. Арифметика Робинсона (Q) и арифметика Пеано (PA).
17. Теорема Матиясевича о диофантовости вычислимо перечислимых множеств.
18. Первая теорема Гёделя о неполноте. Теорема Черча о неразрешимости FOCL. Предикаты доказуемости. Вторая теорема Гёделя о неполноте.

Комбинаторика

1. Перестановки, умножение перестановок, знак перестановки. Количество перестановок.
2. Формула включений-исключений. Сочетания, сочетания с повторениями, размещения.
3. Пути на решетке, обобщенные числа Каталана.
4. Производящие функции. Линейные рекурренты и рациональные производящие функции. Числа Фибоначчи. Производящая функция числа разбиений.
5. Экспонента, логарифм, биномиальный ряд. Экспоненциальные производящие функции. Производящая функция для чисел Каталана. Числа Стирлинга 1 и 2 рода.
6. Комбинаторная теорема о нулях. Вычисление коэффициентов многочленов. Приложение к списочным раскраскам графов.
7. Аддитивная комбинаторика: неравенство треугольника Русы, неравенство Плюнеке, теоремы Коши–Дэвенпорта и Эрдёша–Гейльбронна.
8. Матроиды. Базы, циклы, ранговая функция матроида. Двойственный матроид. Ранговая функция двойственного матроида. Прямая сумма матроидов. Образ матроида. Объединение матроидов. Теорема Нэша–Уильямса.
9. Вероятностный метод: нижняя оценка на числа Рамсея. Локальная лемма Ловаса.
10. Энтропия Шеннона и однозначно декодируемые коды, коды Хаффмена. Энтропия случайной величины. Полуаддитивность энтропии. Оценка суммы начального ряда биномиальных коэффициентов.
11. Код Хемминга. Оценка Хемминга. Линейные коды, оценка Варшамова–Гилберта.
12. Матрица смежности графа, собственные числа, лапласиан графа, матричная теорема о деревьях. Лемма Линдстрема–Гесселя–Вьенно.

13. Экспандеры. Существование алгебраических экспандеров.
14. Тройное тождество Якоби, пентагональная теорема Эйлера. Оценка числа разбиений.
15. Теорема перечисления Пойа. Формула обращения Лагранжа.

Теория графов

1. Пути и циклы в графе.
2. Паросочетания.
3. Раскраски графов.
4. Связность, теоремы Гёринга, Менгера и Уитни.
5. Планарные графы, теорема Куратовского, двойственный граф, триангуляция графа.
6. Ориентированные графы и сети.
7. Экстремальные задачи: оценка количества рёбер в графе. Графы без клики на n вершинах: теорема Турана.
8. Графы и многочлены. Хроматический многочлен графа.

Вычислимость и неразрешимость

1. Машины Тьюринга. Существование неразрешимых задач. Теорема Райса.
2. Вычислительно универсальные модели: рекурсивные функции, автоматы с двумя счётчиками.
3. Множества, представимые в арифметике первого порядка. Арифметическая иерархия.
4. Строгость арифметической иерархии, полные задачи в ней.
5. Теорема Тарского о невыразимости истины. Теорема Гёделя о неполноте.

Математические основы алгоритмов

1. Метод "Разделяй и властвуй": сортировка слиянием, умножение Карацубы, умножение матриц Штрассена.
2. Метод динамического программирования: задача о рюкзаке, задача о наибольшей общей подпоследовательности.
3. Поиск в графе. Нахождение наименьшего остовного дерева.
4. Строковые алгоритмы: поиск Кнута–Морриса–Пратта, поиск Рабина–Карпа, суффиксные структуры данных.
5. Вероятностные алгоритмы: лемма Шварца–Зиппеля,
6. Быстрое преобразование Фурье. Умножение Шёнхаге–Штрассена.
7. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Метод Форда–Фалкерсона.

Конечные автоматы

1. Конечные автоматы. Детерминизация недетерминированных автоматов.
2. Регулярные выражения, их равносильность конечным автоматам.
3. Класс регулярных языков, свойства замкнутости.
4. Вероятностные конечные автоматы, их детерминизация.
5. Конечные автоматы на бесконечных строках.

Формальные грамматики

1. Обыкновенные (бесконтекстные) грамматики,
2. Нормальный вид Хомского, синтаксический анализ за кубическое время.
3. Синтаксический анализ схемой высоты (log n)^2.

4. Доказательства непредставимости языков: лемма о накачке, теорема Парикха.

Сложность вычислений

1. Классы сложности по времени и по памяти, основные включения между ними.
2. Иерархии по времени и по памяти.
3. Недетерминированная память: теорема Савича, теорема Иммермана–Селепчени.
4. Классы сложности L, NL, P, NP, PSPACE, EXP. Полные задачи в них.
5. Чередующийся недетерминизм, полиномиальная иерархия. Теорема Сипсера–Лаутеманна.
6. Вероятностные вычисления: класс BPP и его включение в полиномиальную иерархию.

Теория чисел

1. Делимость и основная теорема арифметики
2. Алгоритм Евклида
3. Сравнимость по модулю и классы вычетов
4. Первообразные корни
5. Квадратичные остатки
6. Суммы квадратов
7. Арифметические функции
8. Распределение простых чисел
9. Диофантовы уравнения и приближения.

2.2. Государственный экзамен может включать следующие виды контрольных заданий: не предусмотрено.
2.3. Примеры контрольных заданий.

01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»
Билет № 1
1. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса.
2. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»
Билет №2
1. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.
2. Структурная устойчивость аносовского диффеоморфизма тора. Определение диффеоморфизмов Аносова и формулировка теоремы об их структурной устойчивости.

01.01.04 «Геометрия и топология»
Билет №3
1. Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий.
2. Двойственность Пуанкаре.

01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»
Билет №4
1. Ветвящиеся процессы. Задача Гальтона – Ватсона о выживании фамилии.
2. Классификация и примеры статистических задач. Статистические эксперименты и статистики. Эмпирические распределения. Выборочные моменты. Порядковые статистики. Теорема Гливенко-Кантелли. Предельные распределения выборочных характеристик.

01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
Билет №5
1. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
2. Конечные поля, их подполя. Автоморфизмы.

3. Рекомендации обучающимся по подготовке к государственному экзамену, перечень литературы для подготовки к государственному экзамену

3.1. Рекомендации обучающимся по подготовке к государственному экзамену:

Основной акцент по освоению дисциплины делается на самостоятельную работу обучающихся.

Обучающийся самостоятельно готовится к экзамену, используя для подготовки материалы, приведенные в списке литературы.

Взаимодействие между преподавателем и обучающимся осуществляется в форме консультаций.

3.2. Перечень литературы и электронных библиотечно-информационных ресурсов для подготовки к государственному экзамену.

Экзамен сдается по выбору одной из перечисленных выше специальностей. Далее приводится перечень литературы для каждой из них.

01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

1. Макаров Б.М., Подкорытов А.Н. Лекции по вещественному анализу. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
2. Маркушевич А.И.. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. - 3-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. - ISBN 978-5-8114-0927-3 (в пер.) Т. I: Начала теории. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. - 486 с. 6 экз. Т. II: Дальнейшее построение теории. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009. - 624 с.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - СПб: Лань, 2008.
4. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - СПб: Лань, 2009.
5. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. - М.: Факториал, 1998.
6. Евграфов М.А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. - 4-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2008. - 448 с.
7. Зорич В.А.. Математический анализ / В. А. Зорич. - М.: МЦНМО, 2012 Ч. II. - 6-е изд., доп.
8. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М.: Наука, 1965.
9. Рудин, Уолтер. Функциональный анализ: Пер. с англ. / У. Рудин. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005. - 443 с.
10. Садовничий В.А. Теория операторов. - М.: Высш. Школа, 1999.
11. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. - М.: Мир, 1983.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.: Физматлит, 2003. - 400 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Физматлит, 2006. - 570 с.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - СПб.: Лань, 2002. - 688 с.
15. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. II. - М.: Наука, 1983.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1976.
17. Рудин У. Основы математического анализа. – СПб: Лань, 2002-2004.
18. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. V. - М.: Физматгиз, 1959.
19. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. - СПб.: Лань, 2004 - Ч. 1: Функции одного переменного. - 4-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2004. - 336 с.

01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб: Лань, 2011+ ЭБС «Лань»

2. Васильева Е.В., Звягинцева Т.Е., Чернышев В.Е. Аналитическая теория дифференциальных уравнений. СПб.: Издательский дом Санкт-Петербургского государственного университета. 2013. 120 с. ISBN 978-5-288-05374-0.
3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. 2008.+ ЭБС «Лань».
5. Коддингтон, Эрл. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ./ Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон; пер., авт. предисл. Б. М. Левитан. - М.: Издательство ЛКИ, 2010. 474 с.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
8. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1995.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1998.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд-во ЛКИ, 2008.
11. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1963.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953.
13. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
15. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Физматлит., 1985.
16. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
17. Ильин Ю.А., Плисс В.А. Теория нелинейных колебаний. I. Основные свойства периодических систем. II. Периодические решения автономных систем. СПб.: Издательский дом Санкт-Петербургского государственного университета. 2012. 128 с. (ISBN 978-5-288-05323-7, ISBN 978-5-288-05323-8)
18. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ, 1996.
19. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961.
20. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
21. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.

01.01.04 «Геометрия и топология»

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Ч. 1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей, Ч. 2. Геометрия и топология многообразий и Ч. 3. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1986, 1984 (Ч. 1 и 2 переизданы. М.: Эдиториал УРСС, 1998).
2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: Изд-во МЦНМО, 2003.
3. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
4. Новиков С.П. Топология. М.—Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1, 2. М.: Наука, 1982, 1984.
7. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
8. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.

9. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: Изд-во МЦНМО, 1997.
10. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
11. Коксетер Г.С.М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
12. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1981.
13. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
14. Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. М.: Наука, 1988.
15. Чжень Ш.-Ш. Комплексные многообразия. М.: Иностранная литература, 1961.
16. Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
17. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
18. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
19. Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. М.: Мир, 1969.
20. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
21. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Факториал Пресс, 2000.
22. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. М.—Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
23. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
24. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
25. Голод П.И., Климык А.У. Математические основы теории симметрий. М.—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
26. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
27. Пресли А., Сигал Г. Группы петель. М.: Мир, 1990.
28. Атья М. Лекции по K-теории. Мир, 1967.
29. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М.—Л.: Гостезиздат, 1950.
30. Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.—Л.: Гостезиздат, 1956.
31. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
32. Дж. Милнор, Теория Морса, М.: Издательство ЛКИ, 2011.
33. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю., Геометрия, СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
34. Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010.
35. Картан Э. Геометрия римановых пространств, М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
36. Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, М.: Издательство ЛКИ, 2008.
37. Атанасиу Г. и др., Дифференциально-геометрические структуры, М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
38. Виноградов А.М., Кальницкий В.С. Принцип наблюдаемости в примерах и задачах. – СПб.: Издательский дом СПбГУ, 2012.
39. Кальницкий В.С., Никанорова М.Ю., Романовский Ю.Р. Дополнительные главы дифференциальной геометрии. Часть 1. – СПб.: СОЛО, 2016.

01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н., Теория случайных процессов, М, Физматлит, 2003.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей. – 4-е изд.- М.: Едиториал УРСС, 2003
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – 6-е изд.- М.: Наука, 1988
4. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. - М.: Агар, 2000.
5. Ширяев А. Н. Вероятность. – 3-е изд. в двух томах М.: Наука, 2004.
6. Боровков А.А. Математическая статистика. - М.: Наука, 2007.

7. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: изд-во ЛКИ, 2010.
8. Бикел П., Доксум К. Математическая статистика. М.: Финансы и статистика, 1983.
9. Большев Л.Н.,Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1972.
10. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах, Агар, 2003.
11. Лукач Е. Характеристические функции. – М.: Наука, 1979.
12. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987.
13. Розанов Ю. А. Случайные процессы, краткий курс. – М.: Наука, 1971.
14. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – т. 1 и 2 – М.: Мир, 1984.
16. Арак Т.В., Зайцев А.Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Труды МИАН, т. 174, 1986,216 с.
17. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
18. Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М, Наука, 1996.
19. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов, М.: Наука, 1977.
20. Крамер Г. Математические методы статистики. - М.:Мир, 1975.
21. Справочник по прикладной статистике. Т 1,2. – М.: Финансы и статистика, 1989.
22. Леман Э. Проверка статистических гипотез. - М.: Наука, 1979.
23. Леман Э. Теория точечного оценивания. - М.: Наука, 1991.

01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

1. Верещагин Н.К., Шень А.Х. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. МЦНМО, 2002.
2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. МЦНМО, 2013.
3. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. Физматлит, 2011.
4. Х. Иванец, Э. Ковальский. Аналитическая теория чисел. МЦНМО, 2014.
5. Колмогоров А.Н. Математическая логика: учебное пособие / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. - 3-е изд., стер. - М.: КомКнига, 2006. - 238 с.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1-3: учебник для студентов университетов / А. И. Кострикин. - М.: Физматлит, 2001
7. Манин Ю.И., Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. МЦНМО, 2013.
8. Прасолов В.В. Многочлены. МЦНМО, 2003.
9. Чеботарев Н.Г. Теория Галуа: научное издание / Н. Г. Чеботарев. - 2-е изд., стереотип. - М.: КомКнига, 2006. - 154 с.
10. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
11. Вейль А. Основы теории чисел. Эдиториал УРСС, 2010.
12. Верещагин Н.К., Шень А.Х. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. МЦНМО, 2012
13. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.
14. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
15. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
16. Колмогоров А.Н. Математическая логика. Дополнительные главы: учебное пособие / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 120 с.

17. Курош А.Г. Теория групп. ФИЗМАТЛИТ. 2011
18. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. 3-е изд. М.: Наука, 1984.
19. Новиков П.С. Элементы математической логики. 2-е изд. М.: Наука, 1973.
20. Серр Ж.П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
21. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.
22. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., Наука, 1986.
23. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М., Наука, 1980.
24. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., Наука, 1976.
25. Мальцев, Анатолий Иванович. Алгебраические системы: монография / А. И. Мальцев. - М.: Наука, 1970. - 392 с.
26. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
27. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.

Перечень иных информационных источников:
Электронный каталог библиотеки: http://ecat.library.spbu.ru/?id=EC
Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ:
- ЭБС «Консультант студента»: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/resource/252
- ЭБС «Юрайт»: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/resource/306
- ЭБС Znanium.com: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/resource/251

Цифровая коллекция библиотеки в Архиве открытого доступа Санкт-Петербургского государственного университета (Репозиторий СПбГУ): https://dspace. spbu.ru/handle/11701/2135
Электронный ресурс в доступе СПбГУ по математике: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?subject=1

4. Методика и критерии оценки государственного экзамена

4.1. Форма проведения государственного экзамена:
✓ Устная ☐Письменная ☐ Устно-письменная ☐ С применением компьютера

4.2. Продолжительность государственного экзамена:
На подготовку ответа аспиранту дается не более 2 часов (астрономических).

4.3. Методика и критерии оценки государственного экзамена:

Критерии оценивания экзамена:
- знание определений, математических понятий, формулировок и доказательств утверждений
- знание фактического материала
- владение необходимым математическим аппаратом
- умение применять имеющиеся теоретические знания при решении задач
- критическое и самостоятельное изложение материала
- способность отвечать на дополнительные вопросы по программе экзамена.

Система оценивания государственного экзамена:
Оценка «отлично» выставляется в том случае, если:
- дан исчерпывающий ответ на поставленные вопросы билета
- даны ответы на дополнительные вопросы
- продемонстрировано наличие глубоких знаний в рамках программы экзамена
- безошибочно использован математический аппарат
- решены поставленные задачи.

Оценка «хорошо»:

- дан достаточно полный ответ на поставленные вопросы билета
- даны ответы на большую часть дополнительных вопросов
- продемонстрировано наличие полных знаний в рамках программы экзамена
- в целом верно использован математический аппарат
- поставленные задачи решены частично.

Оценка «удовлетворительно»:

- дан ответ на поставленные вопросы билета
- даны ответы на отдельные дополнительные вопросы
- продемонстрировано наличие знаний в рамках программы экзамена
- использование математического аппарата содержит неточности
- поставленные задачи решены лишь в целом.

Оценка «неудовлетворительно»:

- не дан ответ на поставленные вопросы билета
- не даны ответы ни на один дополнительный вопрос
- продемонстрирована недостаточность знаний в рамках программы экзамена
- использование математического аппарата содержит грубые ошибки
- поставленные задачи не решены.

Общая оценка за экзамен выставляется по следующим правилам. Оценка «отлично» выставляется в случае, если ответы на все вопросы оценены на отлично, либо один вопрос оценен на «хорошо». Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если имеется хотя бы одна оценка «неудовлетворительно» за ответ на один из вопросов. Оценка «удовлетворительно» выставляется, если имеется более двух оценок удовлетворительно. В остальных случаях выставляется оценка «хорошо».

5. Процедура проведения государственного экзамена

5.1. Государственная итоговая аттестация для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья проводится с учетом особенностей их психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья.

5.2. Проведение государственного экзамена осуществляется в соответствии с Правилами обучения по программам высшего образования - программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, программам ординатуры, реализуемым в Санкт-Петербургском государственном университете, утвержденными приказом от 30.08.2018 № 8577/1 (с последующими изменениями и дополнениями).

5.3. В ситуации крайней необходимости в целях защиты жизни и здоровья обучающихся, научно-педагогических работников и сотрудников, обеспечивающих проведение государственной итоговой аттестации, по решению уполномоченного должностного лица государственная итоговая аттестация может быть проводится исключительно с применением дистанционных технологий.

Приложение № 2

УТВЕРЖДЕНА

приказом от 22.11.2024 № 15895/1

**Программа государственной итоговой аттестации
в форме выпускной квалификационной работы
по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика»
по основной образовательной программе МК.3070.* «Современная математика»
уровень образования: подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре**

1. Общие положения

1.1. Выпускная квалификационная работа (далее – ВКР) представляет собой научно-квалификационную работу, в которой содержится решение задачи, имеющей существенное значение для соответствующей отрасли знаний, либо в которой изложены научно-обоснованные технические, технологические или иные решения и разработки, имеющие существенное значение.

1.2. ВКР является самостоятельным исследованием обучающегося, выполненным под руководством назначенного ему научного руководителя, в соответствии с установленными требованиями. ВКР может быть представлена в виде научного доклада об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы (диссертации).

1.3. Требования к научному докладу, порядок его подготовки и представления и критерии его оценки определяются программой государственной итоговой аттестации с учетом «ГОСТ Р 7.0.11-2011. Национальный стандарт Российской Федерации. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Диссертация и автореферат диссертации. Структура и правила оформления» (утв. и введен в действие Приказом Росстандарта от 13.12.2011 № 811-ст).

1.4. Объем государственной итоговой аттестации, учебный период и сроки государственной итоговой аттестации указаны в актуальном учебном плане и календарном учебном графике.

1.5. Язык подготовки и защиты ВКР: язык реализации образовательной программы.

2. Требования к структуре и содержанию ВКР

2.1. Выпускная квалификационная работа должна соответствовать требованиям, содержащимся в Правилах обучения.

2.2. Выпускная квалификационная работа должна быть написана автором самостоятельно, обладать внутренним смысловым единством, содержать новые научные результаты и положения, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствовать о личном вкладе автора в науку.

2.3. Предложенные автором решения должны быть аргументированы и оценены по сравнению с другими известными решениями.

2.4. В ВКР должно быть отмечено использование в ВКР идей или разработок, принадлежащих соавторам, коллективно с которыми были написаны научные работы.

2.5. В ВКР, имеющей прикладной характер, должны приводиться сведения о практическом использовании полученных автором научных результатов, а в ВКР, имеющей теоретический характер, рекомендации по использованию научных выводов.

2.6. ВКР может быть основана на сданной в печать или опубликованной статье. Опубликованные работы могут быть включены в текст ВКР.

2.7. Выпускная квалификационная работа должна иметь титульный лист, оглавление, введение, содержание, заключение и список использованной литературы, оформленный в соответствии с правилами, принятыми в научной литературе по специальности.

2.8. Введение к ВКР включает в себя актуальность избранной темы, степень ее разработанности, цели и задачи, научную новизну, теоретическую и практическую значимость работы, методологию и методы научного исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробацию результатов.

2.9. В случае если работа была выполнена с использованием Ресурсных Центров СПбГУ, эти центры должны быть перечислены в конце основного текста ВКР перед списком использованной литературы.

2.10. В случае использования заимствованного материала без ссылки на автора и источник заимствования ВКР снимается с рассмотрения вне зависимости от стадии ее рассмотрения без права повторной защиты.

3. Требования к порядку выполнения и оформления ВКР

3.1. Требованием при подготовке ВКР в соответствии с общепринятыми этическими и правовыми нормами является добросовестное цитирование. Выполнение данного требования отражается в отзыве научного руководителя ВКР на основании результатов проверки ВКР на объем заимствования, в т.ч. содержательного выявления неправомочных заимствований.

3.2. Титульный лист должен содержать название работы, название специальности, профиль (специализацию), фамилии, имена и отчества автора, научного руководителя и рецензента, должности и звания научного руководителя и рецензента. Форма титульного листа утверждена приказом проректора по учебно-методической работе от 03.07.2018 № 6616/1.

3.3. В ходе выполнения ВКР допускается использование инструментов / элементов / средств искусственного интеллекта / нейросетей при соблюдении следующих условий:

3.3.1. В ВКР изложена целесообразность и аргументированное обоснование использования инструментов / элементов / средств искусственного интеллекта / нейросетей;

3.3.2. Инструменты / элементы / средства искусственного интеллекта / нейросетей выступают в качестве вспомогательного инструмента для получения промежуточных результатов исследования, в частности для автоматизированного поиска и подбора используемых источников информации, сбора, обобщения, систематизации и стандартной обработки больших массивов данных, для составления диаграмм, схем, графиков, таблиц, библиографических списков и указателей, создания и технической обработки графических изображений, иллюстраций, моделей;

3.3.3. Результаты, полученные с использованием инструментов / элементов / средств искусственного интеллекта / нейросетей, подвергнуты обучающимся проверке на достоверность, самостоятельной обработке, анализу, оценке и авторской переработке с целью включения их в ВКР с осуществлением личного творческого вклада в результаты исследования.

3.4. При оформлении ВКР факт использования инструментов / элементов / средств искусственного интеллекта / нейросетей фиксируется с указанием наименования конкретных инструментов / элементов / средств искусственного интеллекта/ нейросетей, ссылки на них в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», описания методик и протоколов работы с ними, сформулированных в их адрес заданий и полученных с их помощью результатов, а также частей ВКР, в которых они нашли отражение.

4. Методика и критерии оценки ВКР

4.1. Вид ВКР: Выпускная квалификационная работа может быть реализована в виде самостоятельного научного исследования или научного обзора. ВКР может включать в себя научные публикации выпускника (индивидуальные или в соавторстве). В качестве ВКР может быть использована, частично или полностью, диссертация выпускника на соискание учёной степени кандидата наук или PhD. ВКР может выполняться в форме стартапа.

4.2. Продолжительность защиты ВКР: время для доклада как правило не более 15 минут.

4.3. Методика и критерии оценки ВКР: Государственная экзаменационная комиссия (ГЭК) оценивает выпускную квалификационную работу (ВКР) на основании ее содержания и оформления, доклада выпускника на защите и обсуждения содержания работы членами ГЭК.

При оценивании отдельных аспектов работы комиссия может проводить аргументированное голосование или, по желанию, может придерживаться балльной оценки в соответствии со следующими критериями:

(1) Степень научной новизны полученного результата.

Критерии	Баллы
Работа содержит новые результаты, полученные лично автором	15
Работа содержит результаты, повторяющие уже известные, но они получены применением новых подходов и методов	10
Результаты и методы их достижения, представленные в работе, являются известными, однако выбор и стиль их изложения демонстрирует базовые профессиональные навыки выпускника	5
Не продемонстрировано ничего из вышеизложенного	0

(2) Степень полноты изложения

Критерии	Баллы
Работа содержит полные доказательства представленных утверждений, выводы полностью аргументированы, изложение свободно от неточностей	10
В изложении имеются лакуны, не ставящие под сомнение справедливость результатов и выводов	8
В работе есть преодолимые неточности, незначительные ошибки, потребовавшие дополнительного обсуждения	5
Представленная работа содержит существенные ошибки	0

(3) Умение работать с информацией, опубликованной в научных источниках

Критерии	Баллы
В работе описан научный контекст решаемой задачи, указаны научные источники	10
Продемонстрированы навыки работы с научной литературой, составлена библиография по теме работы	7
В работе не полностью использованы необходимые для раскрытия темы научная литература, материалы исследования	3
Отсутствует литературный обзор, библиография по теме работы	0

(4) Способность к участию в научной дискуссии

Критерии	Баллы
В процессе защиты продемонстрирована способность к участию в научной дискуссии по результатам выполненной работы, даны аргументированные ответы на все вопросы, заданные комиссией	10
В процессе защиты были даны обоснованные ответы на большинство	8

вопросов, заданных комиссией	
В процессе защиты ответы на вопросы, заданные комиссией, были недостаточно обоснованы	2
В процессе защиты не были даны ответы на большинство вопросов, заданных комиссией	0

(5) Соответствие содержания и оформления предъявленным требованиям

Критерии	Баллы
По своему содержанию и оформлению работа соответствует всем предъявленным требованиям	5
По своему содержанию и оформлению работа частично соответствует предъявленным требованиям	3
По своему содержанию и оформлению работа не соответствует предъявленным требованиям	0

Таблица соответствия суммы баллов оценкам за выпускную квалификационную работу

Сумма баллов в 50-балльной шкале	Оценка
40-50	Отлично
30-39	Хорошо
15-29	Удовлетворительно
0-14	Неудовлетворительно

5. Процедура защиты ВКР

5.1. ВКР/научный доклад подлежит размещению обучающимся в системе информационной поддержки образовательного процесса в порядке, предусмотренном соответствующим регламентом, в соответствии с Правилами обучения по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, программам ординатуры, реализуемым в Санкт-Петербургском государственном университете, утвержденными приказом от 30.08.2018 № 8577/1 (с последующими изменениями и дополнениями).

5.2. Государственная итоговая аттестация для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья проводится с учетом особенностей их психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья.

5.3. Защита ВКР осуществляется в соответствии с Правилами обучения по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, программам ординатуры, реализуемым в Санкт-Петербургском государственном университете, утвержденными приказом от 30.08.2018 № 8577/1 (с последующими изменениями и дополнениями).

5.4. В ситуации крайней необходимости в целях защиты жизни и здоровья обучающихся, научно-педагогических работников и сотрудников, обеспечивающих проведение государственной итоговой аттестации, по решению уполномоченного должностного лица государственная итоговая аттестация может быть проводится исключительно с применением дистанционных технологий.